

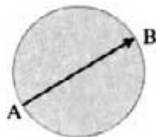
Por el giro de una aguja

Antonio Córdoba

Para ella

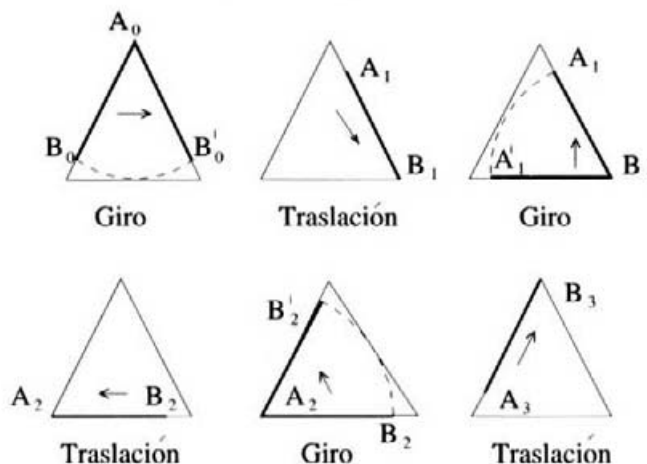
MANIOBRAS EN ÁMBITOS ESTRECHOS

Un tema clásico de la teoría de la medida surgió alrededor del curioso problema formulado por Kakeya [9]: *Hallar un conjunto plano de área mínima, dentro del cuál sea posible mover continuamente un segmento hasta invertir su posición.*



Supongamos, para fijar la discusión, que tenemos un segmento AB de longitud unidad (figura de la izquierda). Es obvio que un giro de 180° alrededor de su punto medio realiza la tarea encomendada. La aguja barre un círculo de área igual a $\pi/4$.

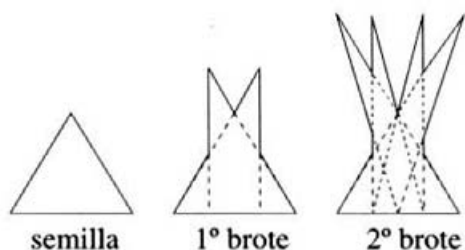
Sin embargo, por muy natural que nos parezca, no hemos obtenido la solución al problema planteado por Kakeya. Un triángulo equilátero de altura unidad también permite invertir la posición de la aguja, deslizándola dentro de él por medio de la sucesión de movimientos ilustrada en la siguiente figura:



El área del triángulo es menor que la del círculo, pero tampoco es la respuesta. En realidad la solución no existe, como demostró Besicovitch, que es uno de los creadores de la teoría geométrica de la medida.

En términos más precisos: Besicovitch ideó un método que permite, por pequeño que sea el número positivo ϵ , construir un conjunto de área menor que ϵ donde es posible invertir continuamente la posición de la aguja. La construcción asemeja el crecimiento de un árbol, desde su semilla, un triángulo de área

pequeña, hasta su ramaje adulto, formado por muchos triángulos delgados que se cortan en partes comunes, de manera que la aguja puede moverse de rama en rama hasta girar su posición inicial, mientras que el área total del árbol se mantiene pequeña.



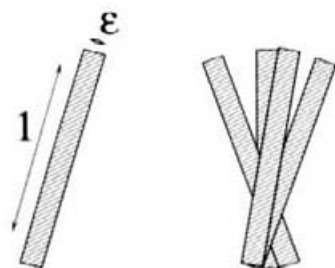
Existe una película filmada, que es una interesante experiencia de didáctica de las Matemáticas, en la que Besicovitch explica el crecimiento de estos árboles. Varios autores, entre los que cabe citar a M. de Guzmán [8] y E.M. Stein [10], los han incluido también en sus monografías. En el límite de la construcción se obtiene un conjunto de medida

cero y que, sin embargo, contiene a un segmento de longitud unidad (de hecho puede conseguirse toda una línea recta) en cualquier dirección del plano. A comienzos de los años setenta, C. Fefferman encontró diversas aplicaciones analíticas de las propiedades "paradójicas" de estos conjuntos. Especialmente celebrada fue su refutación de la conjetura acerca de la acotación del multiplicador del disco [7].

EL CASO DE UNA AGUJA GRUESA

En la discusión anterior se trataba de una aguja idealizada, sin grosor, para la que hemos tomado como modelo a un segmento rectilíneo orientado.

Consideremos ahora una aguja gruesa que podemos modelar por un rectángulo de dimensiones $1 \times \epsilon$: ¿Cuánto debe medir un conjunto que contenga agujas en todas las direcciones del plano? Es claro que el área debe ser, por lo menos ϵ , pero seguramente será algo mayor. El teorema que enunciamos a continuación, da una respuesta precisa de hasta donde podemos llegar en este caso.



Teorema 1 *Existe una constante $C > 0$ tal que si un subconjunto del plano contiene un rectángulo de dimensiones $1 \times \epsilon$ en cada dirección, entonces su área debe ser mayor o igual que $C/[1 + |\log \epsilon|]$*

(De la demostración del teorema podemos estimar una cota para la constante C ; por ejemplo, $C = \pi/4$ sirve, pero éso será irrelevante en nuestra discusión.)

Prueba.

Sea P un subconjunto medible del plano que verifique las hipótesis del teorema. Para cada número natural j , $0 \leq j \leq \epsilon^{-1}$, designemos por R_j a un

rectángulo de dimensiones $1 \times \epsilon$ contenido en el conjunto P , cuya dirección, es decir, el ángulo que forma su lado mayor con la horizontal, sea $w_j = \frac{1}{2}\pi\epsilon j$.

Obtenemos un total de $[\epsilon^{-1}] + 1$ rectángulos, donde hemos usado la notación habitual $[t]$ para designar a la parte entera del número real t .

Sea ϕ_j la función indicadora del rectángulo R_j , es decir, $\phi_j(x, y) = 1$ si (x, y) es un punto de R_j , mientras que $\phi_j(x, y) = 0$ en caso contrario.

Tenemos que $\epsilon = \text{área}(R_j) = \int \int \phi_j(x, y) dx dy$. Luego:

$$\begin{aligned} 1 &\leq \sum_j \text{área}(R_j) = \int \int \sum_j \phi_j(x, y) dx dy \\ &\leq [\text{área}(\cup R_j)]^{\frac{1}{2}} \left[\int \int \left[\sum_j \phi_j(x, y) \right]^2 dx dy \right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

para lo que hemos usado la desigualdad de Hölder en el último paso.

A continuación, observemos que:

$$\begin{aligned} \int \int \left[\sum_j \phi_j(x, y) \right]^2 dx dy &= \sum_{j,k} \int \int \phi_j(x, y) \phi_k(x, y) dx dy \\ &= \sum_{j,k} \text{área}(R_j \cap R_k). \end{aligned}$$

Un sencillo cálculo trigonométrico (véase la figura siguiente) nos da:

$\text{área}(R_j \cap R_k) \leq \frac{2}{\pi} \frac{\epsilon}{|k-j|}$ cuando $|k-j| \geq 1$. Por lo tanto obtenemos la estimación:

$$\begin{aligned} 1 &\leq [\text{área}(\cup R_j)]^{\frac{1}{2}} \left[\frac{2}{\pi} \epsilon \sum_{j \neq k} \frac{1}{|j-k|} + \epsilon([\epsilon^{-1}] + 1) \right]^{\frac{1}{2}} \\ &\leq [\text{área}(\cup R_j)]^{\frac{1}{2}} \left[\frac{4}{\pi} (1 + \log |\epsilon|) \right]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Es decir: $\text{área}(P) \geq \text{área}(\cup R_j) \geq \frac{\pi}{4} \frac{1}{1 + |\log \epsilon|}$, uniformemente en $0 < \epsilon \leq 1$.



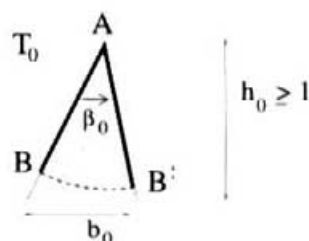
□

VARIEDAD DE ÁRBOLES

Mostrar que el teorema anterior es de lo mejor posible, implica construir, para cada $\epsilon > 0$, un conjunto P que contenga rectángulos de dimensiones $1 \times \epsilon$ en cada dirección del plano y de área menor que $C/|\log \epsilon|$. Donde $C < \infty$ sea una constante absoluta, es decir, independiente de $\epsilon > 0$. En este empeño indicaremos también los detalles que son precisos para resolver el problema de la aguja delgada.

Consideremos un triángulo T_0 de altura $h_0 (\geq 1)$ y base b_0 en el que podemos girar un ángulo β_0 un segmento de longitud unidad.

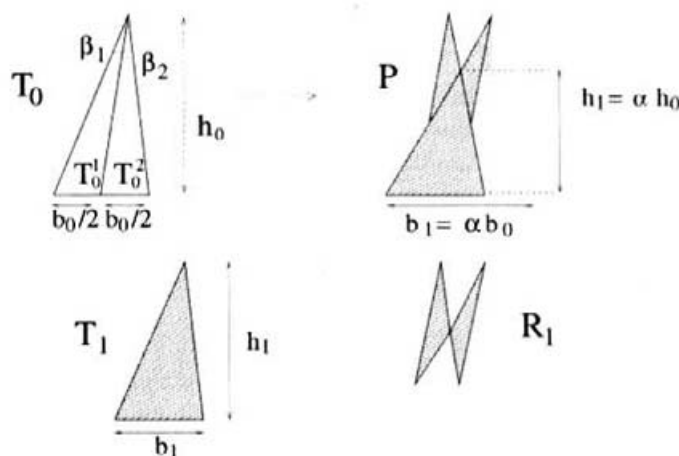
El mismo efecto puede conseguirse en el conjunto P , obtenido al dividir en dos partes el triángulo T_0 por la mediana de su base y trasladar después los triángulos resultantes para que se solapen un poco. El solapamiento lo controlamos por medio del parámetro α , $\frac{1}{2} \leq \alpha < 1$.



El conjunto obtenido al que hemos designado por P (pimpollo), consta de un tronco, que es un triángulo T_1 semejante a T_0 con razón α , y dos ramas R_1 . Unas sencillas consideraciones basadas en la semejanza nos producen la identidad:

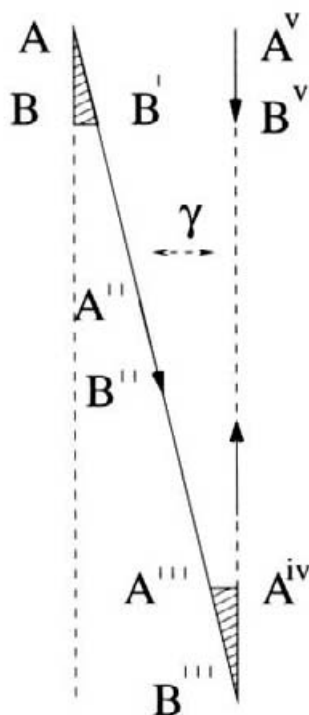
$$\text{área}(P) = \text{área}(T_1) + \text{área}(R_1) = [\alpha^2 + 2(1 - \alpha)^2] \text{área}(T_0).$$

Cantidad que podemos hacer estrictamente menor que $\text{área}(T_0)$ sin más que escoger el número α convenientemente.



Si β_1, β_2 son los ángulos opuestos a la base $b_0/2$, de los triángulos de la subdivisión de T_0 , es claro que $\beta_0 = \beta_1 + \beta_2$ y que la aguja puede ser girada un ángulo β_1 en T_0^1 (respectivamente, β_2 en T_0^2).

Observemos también que T_0^1, T_0^2 tienen dos lados paralelos y que es posible trasladar la aguja a una posición paralela, siempre que dispongamos de una porción de área por gastar, por pequeña que ésta sea, como muestra la figura: $\text{área}(ABB') + \text{área}(A'''B'''A^{IV}) \leq \frac{\gamma}{\pi}$, y el ángulo γ puede ser tomado arbitrariamente pequeño con tal de alargar la figura a una distancia suficientemente grande. Obsérvese que la aguja describe área cero cuando se mueve en las líneas rectas AB''' y $B'''A^V$.



La combinación de las dos observaciones anteriores permite usar el conjunto P para girar la aguja un ángulo total β_0 dentro de un área estrictamente menor que la de T_0 . La idea de Besicovitch consistió en iterar esta construcción muchas veces.

Dado un entero positivo n , dividimos la base de un triángulo equilátero T_0 , de altura h_0 , en 2^n segmentos de idéntica longitud. A partir de ellos obtenemos la descomposición en triángulos:

$$T_0 = T_0^1 \cup T_0^2 \cup \dots \cup T_0^{2^n}$$

Con cada pareja $T_0^{2k-1} \cup T_0^{2k}$, donde $k = 1, \dots, 2^{n-1}$ construimos el pimpollo

$$P_1^k = T_1^k \cup R_1^k$$

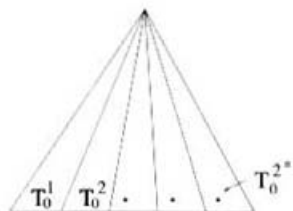
de la manera descrita anteriormente y usando un parámetro $\frac{1}{2} \leq \alpha_1 < 1$.

Observemos que los distintos triángulos T_1^k , $k = 1, \dots, 2^{n-1}$ tienen, cada dos consecutivos, un lado común. Por tanto, pueden ser trasladados hasta posiciones adyacentes y formar un nuevo triángulo T_1 que es semejante a T_0 con razón α_1 .

Trasladamos también las ramas R_1^k a las posiciones correspondientes \tilde{R}_1^k , obtenemos como unión un conjunto A_1 , el primer árbol, que verifica:

$$A_1 = T_1 \cup \tilde{R}_1^1 \cup \tilde{R}_1^2 \cup \dots \cup \tilde{R}_1^{2^{n-1}},$$

$$\text{área}(A_1) \leq [\alpha_1^2 + 2(1 - \alpha_1)^2] \text{área}(T_0)$$



Observemos que el triángulo T_1 es, a su vez, una unión de 2^{n-1} triángulos de igual base ($\alpha_1 b_0 2^{-n+1}$) y altura ($h_1 = \alpha_1 h_0$). Podemos repetir el mismo proceso con otro parámetro α_2 , $\frac{1}{2} \leq \alpha_2 < 1$, y así sucesivamente un total de n veces, con

parámetros respectivos $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$. (Las monografías [8] y [10] contienen esta construcción con todos los detalles, en el caso $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n$.)

Al final obtenemos un árbol

$$A_n = T_n \cup \{\text{ramas}\}$$

de manera que

$$\begin{aligned} \text{área}(A_n) \leq & \{ \alpha_1^2 \alpha_2^2 \cdots \alpha_n^2 + 2[(1 - \alpha_1)^2 + \alpha_1^2(1 - \alpha_2^2) + \\ & + \cdots + \alpha_1^2 \alpha_2^2 \cdots \alpha_{n-1}^2(1 - \alpha_n^2)] \} \text{área}(T_0). \end{aligned}$$

Fijamos ahora los valores

$$\alpha_k = 1 - \frac{1}{n+2-k}, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

que nos dan las estimaciones

$$\alpha_1 \cdots \alpha_n = \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{1}{n+2-k} \right) = \frac{1}{n+1}$$

$$\alpha_k(1 - \alpha_{k+1}) = 1 - \alpha_k.$$

Por tanto:

$$\text{área}(A_n) \leq \left\{ \left(\frac{1}{n+1} \right)^2 + 2n \left(\frac{1}{n+2} \right)^2 \right\} \text{área}(T_0) \leq \frac{2}{n} \text{área}(T_0).$$

Finalmente observemos que los 2^n triángulos de la subdivisión original pueden ser trasladados hasta encajar dentro de A_n . Por tanto, si hemos partido de $h_0 \geq 2$, entonces cualquier rectángulo de dimensiones 1×2^{-n} , que forme un ángulo menor de 30° con la altura del triángulo equilátero inicial T_0 , puede ser trasladado también dentro de A_n . Uniendo los seis conjuntos obtenidos al rotar A_n con los ángulos $j\pi/6$ radianes, $j = 0, 1, 2, 3, 4, 5$, obtenemos el conjunto pedido para $\epsilon = 2^{-n}$. El caso general, $\epsilon > 0$, se reduce a éste con suma facilidad.

COROLARIOS, VARIACIONES Y PROBLEMAS ABIERTOS

Llevando al límite el método de Besicovitch obtenemos un conjunto de medida cero y que, sin embargo, contiene segmentos de longitud unidad en cualquier dirección del plano (remitimos de nuevo a [8] donde pueden encontrarse los detalles). Este conjunto, al que designaremos K , es ciertamente pequeño, de medida nula. Sin embargo, su dimensión fractal o de Minkowski es grande, la mayor posible:

$$\dim_M(K) = 2.$$

Recordemos que la dimensión es el valor del límite siguiente:

$$\dim_M(K) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[2 - \frac{\log(\text{área}(K_\epsilon))}{\log \epsilon} \right]$$

siendo $K_\epsilon = \{x : \text{dist}(x, K) \leq \epsilon\}$. Observemos que K_ϵ contiene a un rectángulo de dimensiones $1 \times \epsilon$ en cualquier dirección del plano según el teorema

$$\text{área}(K_\epsilon) \geq \frac{C}{|\log \epsilon| + 1}.$$

Por tanto,

$$\left| \frac{\log(\text{área}(K_\epsilon))}{\log \epsilon} \right| \ll \frac{\log |\log \epsilon|}{|\log \epsilon|} \rightarrow 0, \quad \epsilon \rightarrow 0.$$

Las propiedades de estos conjuntos están íntimamente relacionadas con las sumas parciales esféricas de series de Fourier múltiples. En particular, hay una función maximal y un lema de recubrimiento asociados a los rectángulos de excentricidad ϵ^{-1} (cociente entre el lado mayor y el lado menor).

Las referencias [3], [4] y [5] contienen algunos resultados del autor de este artículo sobre esos objetos.

¿Qué ocurre en dimensiones mayores?

Problema 1 En \mathbb{R}^3 (en general en \mathbb{R}^n) tenemos también agujas (cilindros) de altura unidad y radio $\epsilon > 0$:

¿Cuál es el volumen menor que puede contener a una ϵ -aguja en cada dirección del espacio?

Se trata de un problema interesante, con aplicaciones diversas, y del que desconocemos la solución. T. Wolff ha obtenido algunos resultados parciales en el caso $n \geq 3$. Su trabajo [11] ha sido distinguido en la concesión del premio Bôcher de la A.M.S.

Problema 2 Tomemos coordenadas cartesianas en el plano. Supongamos que por cada punto del eje OX de coordenadas $(\frac{k}{N}, 0)$, donde $k = 1, 2, \dots, N$, pasa una recta distinta del eje OX .

Sea j un entero positivo y designemos con $F_N(j)$ el número total de puntos distintos obtenidos al intersecar estas rectas con las líneas paralelas de ecuaciones: $y = 1; y = 2; \dots; y = j$. (En otras palabras: el número total de puntos de las rectas trazadas, cuyas ordenadas son enteros positivos no mayores que j .) Es claro que $F_N(1) \geq 1$ y no resulta difícil probar que $F_N(2) \geq N^{1/2}$.

¿Es cierto que $F_N(3) \geq CN^{2/3}$?

¿Es cierto, en general, que $F_N(j) \geq CN^{1-1/j}$? (Para alguna constante absoluta $C > 0$.)

Supongamos que a través de cada intervalo

$$\left[\left(\frac{k-1}{N}, 0 \right), \left(\frac{k}{N}, 0 \right) \right], \quad k = 1, \dots, N$$

pasa una franja que no sea paralela al eje OX .

Designemos con $M_N(k)$ la medida lineal de la intersección de la unión de estas franjas con las líneas horizontales $y = 1, y = 2, \dots, y = k$.

¿Es cierto que $M_N(k) \geq CN^{-1/k}$?

Bibliografía

- [1] BESICOVITCH, A.S.: *On Kakeya's problem and similar one*, Math. Z., **27**, (1928), 312-320.
- [2] [—]: *On fundamental geometric properties of plane line sets*, J. London Math. Soc., **39**, (1964), 441-448.
- [3] CÓRDOBA, A.: *The Kakeya maximal function and the spherical summation multipliers*, Amer. J. of Math, **99**, (1977), 1-22.
- [4] [—]: *Geometric Fourier Analysis*, Ann. Inst. Fourier, **32**, (1982), 215-226.
- [5] [—]: *The fat needle problem*, Bull. London Math. Soc, **25**, (1993), 81-83.
- [6] CUNNINGHAM, F.: *Three Kakeya problems*, Amer. Math. Monthly, **81**, (1974), 582-92.
- [7] FEFFERMAN, C.: *The multiplier problem for the ball*, Ann. of Math., **94**, (1971), 330-36.
- [8] GUZMÁN, M. DE: *Real Variable Methods in Fourier Analysis*, North-Holland Math. Studies, 46.
- [9] KAKEYA, S.: *Some problems on maxima and minima regarding ovals*, Tôhoku Sci. Reports, **6**, (1917), 71-88.
- [10] STEIN, E.M.: *Harmonic Analysis*, Princeton U. Press, 1993.
- [11] WOLFF, T.: *An improved bound for Kakeya type maximal function*, Revista Mat. Iberoamericana, **11**, 3 (1995), 651-674.

Antonio Córdoba. Departamento de Matemáticas. Universidad Autónoma de Madrid. 28049 Madrid.
email:antonio.cordoba@uam.es